

# Opakování grafové teorie

Pokročilá informatika

Splňte všechny následující úlohy. V případě potřeby si prostudujte příslušné slidy z prezentací nebo si vyhledejte potřebné informace v literatuře či na internetu.

### 1. úloha | Neorientovaný graf

Uvažujte, že máme definován neorientovaný graf  $G$  dle následující matice sousednosti:

|       | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $v_1$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| $v_2$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| $v_3$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| $v_4$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| $v_5$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |

Odpovězte na následující otázky:

1. Určete počet vrcholů a hran grafu  $G$ .
2. Nakreslete graf  $G$ .
3. Určete stupeň vrcholu  $v_3$  a  $v_4$ .
4. Zjistěte, zda je graf  $G$  souvislý.
5. Najděte konstru grafu  $G$ .

### 2. úloha | Orientovaný graf

Nechť je dán graf  $H = (V, E)$  kde:

- $V = \{1, 2, \dots, 6\}$
- $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 2), (3, 5), (4, 2), (4, 6), (5, 4), (5, 6)\}$

Odpovězte na následující otázky:

1. Jaký je vstupní, výstupní a celkový stupeň všech vrcholů grafu  $H$ ?
2. Je graf  $H$  slabě souvislý?
3. Je graf  $H$  silně souvislý?

### 3. úloha | Binární maximová haldá

Uvažujme, že nad binární maximovou haldou si definujeme následující operace:

- $\text{Add}(x)$ : Přidá prvek  $x$  do haldy.

- `ExtractMax()`: Odebere a vrátí maximální prvek z haldy.
- `Change( $i, y$ )`: Změní hodnotu prvku na indexu  $i$  na hodnotu  $y$ .

Na prázdné binární maximové haldě proveďte následující sekvenci operací. Operace jsou vždy rozděleny do „skupin“. Po **provední každé skupiny operací** a uveďte stav haldy:

1. `Add(3)`, `Add(4)`, `Add(1)`
2. `ExtractMax()`
3. `Add(6)`, `Add(18)`, `Add(8)`, `Add(-10)`
4. `Change(3, 7)`
5. `ExtractMax()`
6. `ExtractMax()`

Odpovězte na následující otázky:

1. Kolik vrstev má halda po zpracování operací do skupiny číslo 3 (včetně)?
2. Kolik je nutné projít (zkontrolovat hodnotu) vrcholů pro zavolání operace ve skupině číslo 4?
3. Jakou asymptotickou časovou složitost má každá z operací?

#### 4. úloha | Binární vyhledávací strom

Uvažujme, že nad binárním vyhledávacím stromem máme definovány následující operace:

- `Add( $x$ )`: Vloží prvek  $x$  do stromu.
- `Remove( $x$ )`: Odebere prvek  $x$  ze stromu.
- `Find( $x$ )`: Najde prvek  $x$  ve stromu (vrátí `true/false`).

Na prázdném binárním vyhledávacím stromě proveďte následující sekvenci operací. Operace jsou vždy rozděleny do „skupin“. Po **provední každé skupiny operací** uveďte stav stromu:

1. `Add(3)`, `Add(4)`, `Add(1)`
2. `Remove(1)`, `Find(4)`
3. `Add(1)`, `Add(-1)`, `Add(10)`, `Add(-10)`
4. `Remove(10)`, `Remove(3)`
5. `Add(6)`, `Find(3)`

Odpovězte na následující otázky:

1. Po splnění všech skupin operací, kolik prvků obsahuje strom?
2. Po splnění všech skupin operací, kolik potřebujeme zkontrolovat vrcholů pro vyhledání prvku s hodnotou  $-1$  a  $30$ ?

3. Je výsledný strom dokonale vyvážený?

### 5. úloha | Nevyvážený strom

Uvažujme, že máme binární vyhledávací strom, který není dokonale vyvážený.

Odpovězte na následující otázky:

1. Popište, jak může vypadat nejhorší případ pro operaci  $\text{Find}(x)$ .
2. Vymyslete způsob, jak strom můžeme **přestavět** tak, aby byl dokonale vyvážený.
  - Sepište algoritmus v pseudokódu.
  - Uveďte asymptotickou časovou složitost vašeho přístupu. Uznáno bude řešení které je nejhůře  $O(n^2)$ , kde  $n$  je počet prvků ve stromu.

### 6. úloha | Acyklický graf

Graf  $G = (V, E)$  je acyklický právě tehdy, když jako podgraf neobsahuje žádný cyklus.

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1.  $G$  je acyklický, tak poté platí, že  $|E| < |V|$ .
2. Pokud platí, že  $|E| < |V|$ , tak poté je  $G$  acyklický.

### 7. úloha | Depth-first search

Uvažujte, že máme definován neorientovaný graf  $L$  dle následující matice sousednosti:

|       | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $v_1$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| $v_2$ | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     |
| $v_3$ | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $v_4$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 1     |
| $v_5$ | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     |

Odpovězte na následující otázky:

1. Proveďte průchod grafem  $L$  pomocí DFS. Zapište pořadí navštívení jednotlivých vrcholů, pokud začínáte ve vrcholu  $v_1$  a navštěvujete sousedy v pořadí vždy od nejmenšího čísla vrcholu k největšímu.
2. Sestrojte binární vyhledávací strom z vrcholů v pořadí, v jakém byly navštíveny během průchodu DFS.
3. Určete počet hladin BST získaného v předchozím kroku.

### 8. úloha | Bipartitní grafy

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. Zjistěte si, co je to bipartitní graf.
2. Libovolný strom je vždy bipartitní graf.
3. Graf  $C_n$  (kružnice o  $n$  vrcholech) je bipartitní právě tehdy, když je  $n$  liché číslo.
4. Pokud graf obsahuje cyklus liché délky, nemůže být bipartitní.

### 9. úloha | Topologické uspořádání

Uvažujme, že máme definován orientovaný graf  $D$  dle následující matice sousednosti:

|       | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $v_1$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $v_2$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| $v_3$ | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| $v_4$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $v_5$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $v_6$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |

Odpovězte na následující otázky:

1. Zjistěte, co je to topologické uspořádání grafu.
2. Najděte jedno možné topologické uspořádání grafu  $D$ . Pokud graf nemá žádné topologické uspořádání, vysvětlete proč.

### 10. úloha | Eulerovský tah

Odpovězte na následující otázky:

1. Zjistěte si, co je to Eulerovský tah.
2. Existuje Eulerovský tah v grafu  $K_n$  s  $n$  vrcholy?  $K_n$  je úplný graf s  $n$  vrcholy.
3. Můžeme určit, zda graf obsahuje Eulerovský tah jen pomocí stupňů jednotlivých vrcholů v grafu? Pokud ano, uveďte kritérium.