cajthaml

SSPŠ | 2025/2026

Skripta

Pokročilá informatika

Autor
Ing. Matěj Cajthaml

Verze
14. 12. 2025

© 2025 Ing. Matěj Cajthaml. Všechna práva vyhrazena.

Tento text vznikl z vlastní iniciativy autora a nejedná se o dílo vytvořené v rámci plnění povinností z pracovněprávního či obdobného vztahu. Dílo je chráněno autorským zákonem (zákon č. 121/2000 Sb.).

Poskytnutím tohoto materiálu nevzniká oprávněnému uživateli (dále jen „uživatel“) žádné právo dílo dále šířit, upravovat či jakkoliv komerčně využívat. Materiál je určen výhradně pro osobní studijní potřeby uživatele, který jej legálně obdržel.

Je přísně zakázáno jakékoliv zpřístupňování díla nebo jeho části třetím stranám, a to jakoukoliv formou (včetně elektronického sdílení, nahrávání na servery, odesílání e-mailem, tisku pro jiné osoby apod.). Rovněž je zakázáno text jakkoliv modifikovat, překládat, měnit formát, odstraňovat části díla nebo jej zařazovat do jiných děl bez výslovného písemného souhlasu autora. Stejný zákaz platí pro jakékoliv využití díla nebo jeho části za účelem přímého či nepřímého hospodářského prospěchu.

Uživatel je oprávněn dílo využívat pouze pro osobní potřebu a pořizovat z něj soukromé poznámky a výpisky sloužící ke studiu. Citování přiměřených úryvků v rámci vlastních nekomerčních (např. studijních) prací je povoleno za podmínky řádného uvedení autora, názvu díla a zdroje.

Ačkoliv autor vynaložil přiměřené úsilí k zajištění přesnosti a správnosti obsahu, toto dílo je poskytováno „jak stojí a leží“ bez jakékoliv výslovné či implicitní záruky. Autor nenese žádnou odpovědnost za případné chyby, nepřesnosti nebo za jakoukoliv škodu či újmu (přímou, nepřímou či následnou) vzniklou v důsledku spolehnutí se na informace obsažené v tomto díle nebo jejich použitím.

Užitím tohoto materiálu uživatel bez výhrad přijímá tyto podmínky. Porušení těchto podmínek je považováno za porušení autorského práva a zakládá odpovědnost podle platných právních předpisů.

Obsah

1. Předmluva

1.1 Úvod 2

1.2 Přehled použitého značení 2

2. Důkaz ekvivalentních definic stromu

2.1 První implikace 5

2.2 Druhá implikace 6

2.3 Závěr 6

Předmluva

1.1 Úvod

Tento text je určen především studentům 4. ročníku Smíchovské střední průmyslové školy a gymnázia v Odborném semináři Pokročilá informatika.

Cílem je předat matematický, resp. technický zápis různých druhů důkazů, které se v informatice běžně používají.

Pevně věřím, že pro vás budou přínosná a užitečná na cestě za hlubším porozuměním informatice.

Pokud během čtení narazíte na chybu, nepřesnost nebo budete mít návrh na zlepšení, budu rád, když vytvoříte issue na GitHubu.

1.2 Přehled použitého značení

Symbol	**Význam**
$\{A_1, A_2, ...\}$	Množina obsahující prvky A_1, A_2 a další, kde pořadí prvků není důležité
$\|X\|$	Kardinalita množiny X (počet prvků v množině X)
$X \subseteq Y$	Množina X je podmnožinou množiny Y (každý prvek z X je také v Y) nebo jsou si rovny
$X \cap Y$	Průnik množin X a Y (množina prvků, které jsou v X i v Y)
$X \cup Y$	Sjednocení množin X a Y (množina prvků, které jsou v X nebo v Y)
$X \setminus Y$	Množina prvků, které jsou v X ale nejsou v Y
N_0	Množina všech nezáporných celých čísel: $\{0, 1, 2, ...\}$
N	Množina všech kladných celých čísel: $\{1, 2, 3, ...\}$
Z	Množina všech celých čísel: $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
R	Množina všech reálných čísel, tj. $(-\infty, +\infty)$
$f : A \to B$	Zobrazení f z množiny A do množiny B (každému prvku z A je přiřazen právě jeden prvek z B)
$(A_1, A_2, ..., A_n)$	N-tice obsahující prvky A_1, A_2 a další, kde pořadí prvků je důležité
$\wedge$	Logická spojka **a** (konjunkce)

Symbol	Význam
$\vee$	Logická spojka **nebo** (disjunkce)
$\neg$	Logická spojka **není pravda, že** (negace)
$\Rightarrow$	Logická spojka **implikuje** (implikace)
$\Leftrightarrow$	Logická spojka **právě když** (ekvivalence)
$\forall$	Pro každé (pro všechny)
$\exists$	Existuje (alespoň jeden)
O	Laudauova notace velké O (horní odhad růstu funkcí)
Ω	Laudauova notace velké Omega (dolní odhad růstu funkcí)
Θ	Laudauova notace velké Theta (přesný odhad růstu funkcí)
o	Laudauova notace malého o (přísný dolní odhad růstu funkcí)
ω	Laudauova notace malého omega (přísný horní odhad růstu funkcí)
$\{a \mid a \in A \wedge a \text{ smth}\}$	Množinová notace (množina všech prvků a, které jsou v množině A a splňují nějakou podmínku)

Důkaz ekvivalentních definic stromu

V teorii grafů existuje několik rovnocenných definic pojmu **strom**. Dvě nejběžnější jsou následující:

1. Graf $G = (V, E)$ je **strom**, právě když je **souvislý** a **acyklický**.
2. Graf $G = (V, E)$ je **strom**, právě když je **souvislý** a platí $|E| = |V| - 1$.

Cílem je dokázat, že tyto dvě definice jsou ekvivalentní. Důkaz lze napsat různými způsoby za pomocí různých technik. Níže je popsán jeden z možných přístupů, který nevyužívá indukci.

Protože se snažíme dokázat ekvivalenci, je nejpřirozenější postup rozdělit na dvě implikace. Tedy je potřeba dokázat:
1. Pokud je graf strom (souvislý a acyklický), pak $|E| = |V| - 1$.
2. Pokud je graf souvislý a $|E| = |V| - 1$, pak je strom (souvislý a acyklický).

2.1 První implikace

Dokazujeme, že pokud je graf strom, pak $|E| = |V| - 1$.

Nechť $G = (V, E)$ je konečný[1], neorientovaný graf, který je souvislý a acyklický.

Nyní můžeme rozdělit důkaz na dvě části, a to je, jaké vlastnosti musí platit pro acyklický graf a jaké pro souvislý graf.

2.1.1 Acyklický graf má nejvýše $|V| - 1$ hran

První pozorování, kterého si můžeme všimnout, je že acyklický graf nemůže obsahovat příliš mnoho hran. Uvažujme, jak se mění počet komponent grafu při přidávání hran.

Na začátku máme $|V|$ vrcholů a žádné hrany – tedy $|V|$ komponent. Každý vrchol je izolovaný a tvoří vlastní komponentu.

Přidáním nové hrany do grafu mohou nastat dvě situace:

1. Hrana spojuje vrcholy z **různých komponent** $\rightarrow$ počet komponent se sníží o 1.
2. Hrana spojuje vrcholy **ve stejné komponentě** $\rightarrow$ vznikne cyklus.

K 2. bodu vznikne cyklus z důvodu, že z definice souvislné komponenty plyne, že mezi každými dvěma vrcholy v komponentě existuje cesta. Pokud přidáváme jakoukoliv hranu uvnitř komponenty, tak tato hrana musí spojovat dva vrcholy, mezi nimiž již existuje nějaká cesta. Tím pádem vznikne cyklus, který je tvořen touto nově přidanou hranou a cestou, která mezi těmito vrcholy již existovala.

Aby graf zůstal acyklický, lze přidávat pouze hrany spojující různé komponenty. Každá taková hrana sníží počet komponent o 1, a protože začínáme s $|V|$ komponentami. Skončit můžeme nejvýše s jednou komponentou (tedy souvislým grafem).

Přidávat hrany můžeme maximálně $|V| - 1$-krát, protože po provedení $|V| - 1$ spojení již nemůžeme přidávat další hrany, protože existuje už jenom jedna komponenta. V jedné komponentě již přidávat hrany nesmíme, protože by vznikl cyklus, viz výše.

Tedy platí:

$$|E| \leq |V| - 1.$$

[1] Konečný je takový graf, kde je V konečná množina.

2.1.2 Souvislý graf má alespoň $|V| - 1$ hran

Pokračujeme-li v pozorování výše, můžeme zjistit, kdy platí druhá podmínka stromu z první definice, tedy souvislost.

Aby byl graf souvislý, musí každá přidaná hrana snižovat počet komponent alespoň o 1 až do počtu, kdy zůstane pouze jedna komponenta. Poté každá další přidaná hrana již nemůže snižovat počet komponent, protože zůstala pouze jedna komponenta a tedy graf je potom vždy souvislý.

Z $|V|$ izolovaných vrcholů se musíme dostat na jednu komponentu, což vyžaduje alespoň $|V| - 1$ hran:

$$|E| \geq |V| - 1.$$

2.1.3 Závěr

Spojením obou nerovností výše dostáváme, že pokud je graf souvislý a acyklický, pak platí:

$$|V - 1| \leq |E| \leq |V| - 1$$

Tedy, že $|E| = |V| - 1$.

> **Intuice**
>
> Kdyby měl strom méně než $|V| - 1$ hran, nebyl by souvislý – některé vrcholy by zůstaly nepropojené. Kdyby měl více než $|V| - 1$ hran, musela by jedna z hran spojovat vrcholy, mezi nimiž už existuje cesta, čímž by vznikl cyklus.
>
> Současná souvislost i acykličnost tedy mohou nastat pouze tehdy, když $|E| = |V| - 1$.

2.2 Druhá implikace

Dokazujeme, že pokud je graf souvislý a $|E| = |V| - 1$, pak je strom (souvislý a acyklický).

Prvně vyřešmě acykličnost.

Předpokládejme, že graf $G = (V, E)$ je souvislý a že obsahuje $|E| = |V| - 1$ hran. Předpokládejme pro spor, že obsahuje alespoň jeden cyklus.

Odstraňme z cyklu libovolnou hranu. Protože zbylé vrcholy cyklu zůstávají spojeny, graf zůstane souvislý, ale počet hran se zmenší na $|E| = |V| - 2$. Poté neobsahuje žádné cykly.

Tím jsme získali souvislý graf s méně než $|V| - 1$ hranami, což je v rozporu s tím, že každý souvislý graf na $|V|$ vrcholech musí mít alespoň $|V| - 1$ hran (viz první část důkazu implikace). Z toho plyne, že původní graf cyklus obsahovat nemůže.

Tím jsme dokázali, že graf je acyklický. Souvislost platí přímo z předpokladu.

2.3 Závěr

Pro konečný neorientovaný graf $G = (V, E)$ platí:

$$G \text{ je souvislý a acyklický} \Leftrightarrow G \text{ je souvislý a } |E| = |V| - 1.$$

Tím je dokázána ekvivalence obou definic stromu.